DE

SUPERFICIEBUS CONFOCALIBUS SECUNDI GRADUS.

DISSERTATIO
INAUGURALIS MATHEMATICA

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITERARUM UNIVERSITATE VIADRINA

AD

SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES

RITE CAPESSENDOS

DIE IX. MENS. NOVEMBRIS MDCCCXLIX

H. XI. L. C.

PALAM DEFENDET

AUCTOR

OSWALDUS HERMES,
SILESIUS.

OPPONENTIBUS:

GEORGIO DE BOGUSLAWSKI, PHIL. CAND.
CAROLO SCHERNER, THEOL. CATH. ET PHIL. CAND.
ALBERTO EGGELING, PHIL. CAND.

VRATISLAVIAE,
TYPIS LEOPOLDI FREUND.

VIRO

DOCTISSIMO CLARISSIMO CELEBERRIMO,

FERDINANDO JOACHIMSTHAL

PHILOSOPHIAE DOCTORI, IN UNIVERSITATE FRIDERICA GUILELMA BEROLINENSI PRIVATIM DOCENTI, GYMNASII FRANCOGALLICI MAGISTRO

PRAECEPTORI DILECTISSIMO,

HUNCCE LIBELLUM

GRATI ANIMI DOCUMENTUM

ESSE VOLUIT

AUCTOR.

Theses.

1. Calculi integralis principia ab integralibus definitis petenda sunt.
2. Mechanice caret demonstrationibus mathematicis proprie sic dictis.
3. Chemia, quatenus scientia, theoriam respuit atomorum.
4. Falsum est illud: „In's Innere der Natur dringt kein erschaffener Geist."
5. Socrates jure ab Atheniensibus condemnatus est.

Limitibus ipsis valorum λ exhibentur conici, quos dicere solent *excentricos* seu *focales*: scilicet valoribus

$$\lambda = -c^2,\ \lambda = -b^2,\ \lambda = -a^2$$

excentrici igitur conici ad systema superficierum confocalium pertinent, quarum tamen axis principalis una evanuit.

2) „*Quolibet in puncto spatii tres concurrunt superficies confocales.*“

Aequatio enim (C) tertii est gradus respectu λ, cujus radices omnes sunt reales: unde sequitur, ut ad punctum quodlibet x, y, z tres valores λ reales i. e. tres superficies possint inveniri, quae in illo puncto concurrant: functio enim

$$f(\lambda) = \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

(vide § 13) ex negativo in positivum, i. e. per valorem zero transit pro tribus parametri λ valoribus, qui continentur

inter $\lambda = +\infty$ et $\lambda = -c^2+\varepsilon$,
inter $\lambda = -c^2-\varepsilon$ et $\lambda = -b^2+\varepsilon$,
inter $\lambda = -b^2-\varepsilon$ et $\lambda = -a^2+\varepsilon$:

Unde porro patet:

„Ternas superficies, quae in quovis spatii puncto concurrant, esse Ellipsoiden, Hyperboloiden semel partitam, Hyperboloiden bipartitam.“

3) Quod nonnisi quadrata quantitatum x, y, z in aequatione (C) obveniunt, ex aequationibus ternarum superficierum (C) propositarum etiam tantum quadrata coordinatarum punctorum intersectionis exhibere licet: unde simplice coordinatarum combinatione sequitur, octona puncta, in quibus ternae diversorum generum superficies (C) se invicem secent, haberi posse puncta intersectionis laterum recti et orthogonalis parallelepipedi, cujus diagonales in centro superficierum communi coëant. (Conf. § 14.)

Nota. Aequatio systematis (C) non sine calculi difficultatibus tractari potest, quod parameter λ in denominatoribus singulorum terminorum continetur: quod incommodum fugimus convertendo nos ad aequationem, quam polarisatione systematis (C) respectu

sphaerae alicujus concentricae accipimus. (§ 11.) Atque quum ope theoriae polarium reciprocarum plurimae proprietates superficierum, exhibitarum hac aequatione algebraice facillime tractanda, sine magno negotio ad superficies nostras confocales transferre possimus, posthac *proprietates superficierum confocalium e proprietatibus polarium reciprocarum deducemus.*

Jam theoriam polarium reciprocarum, quoad ejus usum faciamus, paucis adumbremus verbis:

THEORIA POLARIUM RECIPROCARUM*).

§ 3.

Notum est, omnium punctorum in plano aliquo sitorum plana polaria respectu superficiei cujuslibet secundi gradus, cui nomen tribuatur *directricis*, in polo illius plani coire, et vice versa omnium planorum in uno puncto concurrentium polos in plano polari illius puncti sitos esse. Inde patet, si polus in superficie aliqua moveatur, planum polare alteram superficiem involvere nec non utramque superficiem haberi posse involutam planis polaribus singulorum alterius punctorum. Quare loco uniuscujusque puncti, plani, superficiei figurae ad arbitrium in spatio sitae ponentes planum polare, polum, superficiem polarem, alteram obtinemus in spatio figuram: — quae figurae tali modo inter se conjunctae sunt, ut proprietates alterius ad alteram transferre liceat, atque hac de caussa altera alterius figura respectu directricis propositae *polaris reciproca* vocatur.

His praemissis facile simplicissima theoriae polarium reciprocarum principia deducuntur:

§ 4.

Ad systema planorum in uno puncto concurrentium reciprocum polare pertinet systema totidem punctorum in uno plano, polari illius puncti, sitorum et vice versa.

Reciproca polaris lineae rectae iterum est linea recta, et

*) Poncelet, mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques. Crelle, diar. IV, 1—71.

systematis linearum in uno puncto coëuntium systema totidem linearum eodem in plano sitarum.

Curvae cuilibet duplicis curvaturae ejusque devolubili superficiei osculatoriae respondet reciprocum polare systema devolubilis cujusdam superficiei ejusque curvae vertentis: scilicet cuivis curvam propositam lineae tangenti respondet linea curvam vertentem tangens seu generatrix superficiei polaris devolubilis et vice versa: — porro ad singula plana tangentia alteram superficiem devolubilem pertinent puncta curvae alteram reciprocam polarem vertentis, denique cuivis superficiei devolubilis puncto respondet planum per generatricem alterius polaris quandam ductum et vice versa.

Reciprocus polaris curvae alicujus planae *conus* est, vertice utens polo plani, in qno curva illa sita est: atque si centrum superficiei directricis in plano curvae propositae continetur, ita ut polus hujus plani in infinitum abeat, reciprocus ejus polaris est *cylindrus*.

Superficies denique, quia singulis punctis et planis tangentialibus respondent plana tangentialia et puncta reciprocarum polarium, tum loca polorum planorum tangentialium, tum superficies involutae planis polaribus singulorum superficierum propositarum punctorum haberi possunt.

Quare si ad punctum aliquod alterius superficiei planum tangentiale ducimus, planum polare illius puncti alteram superficiem in polo plani tangentialis tangit: et cuivis lineae alteram superficiem tangenti respondet linea alteram polarem tangens in puncto quodam, cujus planum tangentiale est polare puncti, in quo illa linea superficiem propositam tangit.

Lineis rectis in altera superficie descriptis respondent lineae rectae in altera reciproca polari e. s. p.

§ 5.

De gradu superficiei reciprocae polaris.

Superficiem propositam ponendo esse m[ti] gradus, linea quaelibet per eam ducta m dabit puncta intersectionis, quibus

in polari reciproca respondent plana tangentialia concurrentia in eadem linea recta et vice versa: itaque gradus reciprocae polaris par erit numero planorum tangentialium, quae per lineam aliquam ad superficiem illam duci possunt, vel potius hunc numerum non excedet. Quem jam numerum hoc modo reperimus: —

Curvae, in quibus coni a punctis duobus ad arbitrium in spatio sitis verticibus superficiei propositae circumscripti eam tangunt, se invicem in punctis quibusdam secabunt, scilicet in quibus plana per utrumque punctum ducta superficiem tangunt: atque numerus horum punctorum par erit numero quaesito planorum tangentialium, quae per lineam rectam puncta illa continentem ducere licet. Jam possumus probare *curvam, in qua conus quilibet superficiei* m^{ti} *gradus circumscriptus eam tangat, sitam esse in superficie* $(m-1)^{ti}$ *gradus:*

Aequatio enim $\varphi = o$ superficiei alicujus algebraicae m^{ti} gradus continebit terminos graduum $m^{ti}(u)$, $(m-1)^{ti}$ (v), $(m-2)^{ti}$ (w) .... o^{ti} (c): ita ut repraesentare eam liceat sub forma:

$$u + v + w + \ldots\ldots + c = o: \quad (1)$$

Aequatio plani tangentialis est:

$$\xi \frac{d\varphi}{dx} + \eta \frac{d\varphi}{dy} + \zeta \frac{d\varphi}{dz} = x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy} + z \frac{d\varphi}{dz},$$

$$= x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz}$$

$$+ x \frac{dv}{dx} + y \frac{dv}{dy} + z \frac{dv}{dz}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jam notum est, quum u sit functio aliqua homogenea ex. gr. trium variabilium n^{ti} gradus, aequationem valere:

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} = n.\, u \qquad (2).$$

unde:

$$\xi \frac{d\varphi}{dx} + \eta \frac{d\varphi}{dy} + \zeta \frac{d\varphi}{dz} = mu + (m-1)v + (m-2)w + \ldots (3)$$

quodsi ex aequationibus (1) et (3) quantitatem u eliminamus, eruimus:

$$\xi \frac{d\varphi}{dx} + \eta \frac{d\varphi}{dy} + \zeta \frac{d\varphi}{dz} + v + 2\,w + \ldots + mc = 0$$

aequationem plani tangentialis tantum $(m-1)^{ti}$ gradus respectu x, y, z, vel si ξ, η, ζ quantitates datas et x, y, z variabiles ponimus, aequationem curvae, quae in superficie φ et in omnibus planis, per ξ, η, ζ ad superficiem φ tangentialia ductis, i. e. in cono quodam circumscripto sita est: — haec igitur curva in superficie quadam $(m-1)^{ti}$ gradus sita erit, q. d. e.

Hinc patet, numerum planorum tangentialium, quae per lineam aliquam rectam ad superficiem m^{ti} gradus propositam duci possint, aequalem esse numero punctorum, in quibus duae quaelibet superficies $(m-1)^{ti}$ et una m^{ti} gradus se invicem secent, i. e.

$$m\ (m-1)^2:$$

hunc igitur numerum gradus reciprocae polaris excedere nequit.

Unde sequitur hoc theorema:

„*Reciproca polaris superficiei alicujus secundi gradus (m = 2) est altera superficies s. g.: porro quaelibet ei circumscripta superficies conica secundi est gradus.*"

§ 6.

Applicatio ad superficies s. g.

Disquisitio reciprocarum polarium superficies s. g. in duo dividit genera:

1) Superficies, in quibus lineae rectae duci nequeunt: Ellipsoides, Hyperboloides bipartita, Paraboloides elliptica.

2) Superficies, in quibus lineas rectas describere licet: Hyperboloides semel partita et Paraboloides hyperbolica: — quibus etiam addendi sunt conus et tria cylindrorum genera.

Ad singulas utriusque generis superficies pertinent reciprocae polares superficies ejusdem generis, quod lineis rectis alterius superficiei in altera reciproca polari lineae rectae respondent (§ 4): at cujus sit generis superficies polaris reciproca, pendet a situ centri superficiei directricis, — siquidem ponimus, eam superficiem centro gaudere.— Quodsi centrum ita situm est, ut per id planum propositam superficiem tangens ducere possimus, i. e. extra snperficiem, reciprocae polaris puncta quaedam in infinito sita erunt, quorum tamen plana tangentia non in infinitum abibunt: sin centrum directricis in proposita superficie ipsa situm est, ita ut in eo planum superficiem tangens ducere possimus, reciprocae polaris planum quoddam tangentiale in infinitum abit: denique si centrum intra superficiem propositam versatur, polaris reciproca nullum habet punctum in infinito.

Haec breviter exposita sufficiunt ad theoremata eruenda sequentia, de primo superficierum genere:

„*Reciproca polaris cujusvis harum superficierum est Ellipsoides, Hyperboloides bipartita vel Paraboloides elliptica, prout centrum directricis intra, extra vel in superficie proposita ipsa situm est.*

Porro de conis et cylindris:

„*Reciproca polaris coni alicujus vel cylindri est Ellipsis, Hyperbole vel Parabole, prout centrum directricis intra, extra vel in proposita superficie ipsa versatur.*"

Vice versa:

„*Reciprocus polaris conici alicujus respectu directricis, cujus centrum in plano conici ipso situm est, est cylindrus ellipticus, hyperbolicus vel parabolicus, prout centrum directricis intra, extra vel in conico proposito versatur.*"

In superficiebus alterius generis Paraboloides hyperbolica quasi transitum format inter duas Hyperboloidas semel partitas, quarum altera habet alterius aliam axis imaginariae directionem: quolibet enim plano per superficiem propositam et centrum directricis ducto reciprocus polaris curvae intersectionis

est cylindrus ellipticus aut hyperbolicus, prout centrum directricis intra aut extra superficiem situm est. Qui quum cylindrus reciprocae polari sit circumscriptus, haec superficies aliam habet directionem axis imaginariae pro latere superficiei propositae, in quo centrum directricis versetur.

§ 7.

Relationes inter angulos figurarum polarium reciprocarum.

Simplicitatis caussa directricem ponendo sphaeram aliquam poli duorum quorumlibet planorum siti sunt in perpendiculis a centro sphaerae in plana demissis, ita ut angulus his perpendiculis inclusus supplementum sit anguli inter illa plana: eodem modo lineis duabus rectis ad arbitrium in spatio sitis polares respondent duae aliae lineae rectae, et plana ducta per has lineas polares et centrum directricis sphaerae perpendicularia erunt ad lineas propositas, ita ut eorum angulus inclinationis supplementarius sit anguli inter lineas propositas, quae ceterum sese diffindant non opus est.

Fere idem accipimus propositis linea aliqua recta et plano. Itaque:

„*Angulus binorum planorum, vel binarum linearum, vel plani et lineae cujusvis supplementarius est anguli, sub quo poli eorum aut polares a centro sphaerae directricis apparent, i. e. illi anguli eundem habent sinum.**)“

Itaque proposita serie planorum in linea recta concurrentium, ut inter sinus angulorum inter ea inclusorum relatio quaedam valeat, eadem relatio pro sinubus angulorum inter radios resp. ductos a centro sphaerae directricis per polos illorum planorum, qui omnes in linea quadam recta siti erunt, locum habebit. Sunt autem quaedam relationes, — et de iis jam agemus, — quas protenus a sinubus angulorum ad respondentes figurarum distantias deferre liceat et vice versa, ita ut tales relationes ex altera figura ad respondentes polaris reciprocae distantias immutatas transferre possimus.

---

*) Hinc sequitur, angulis rectis respondere in polari reciproca angulos rectos.

§ 8.

De relationibus figurarum projectivis.

Si a quolibet spatii puncto P radios ducimus ad puncta angularia cujusvis figurae ABC .... ad arbitrium in spatio sitae, atque si in singulis his radiis alia ponimus puncta $A_{,}, B_{,}, C_{,}, \ldots$, nova figura $A_{,}B_{,}C_{,}\ldots$, non inepte projectiva figurae propositae habenda, eadem gaudebit relatione inter respondentes partes atque illa, siquidem summa substitutionis tantum ab angulis fascis radiorum ad centrum projectionis pendet, quia nonnisi hi anguli utrique figurae immanent.

Appellatis a, b, ... $a_{,}$, $b_{,}$, ... intervallis PA, PB, ... $PA_{,}$, $PB_{,}$, ... et h_{ab}, h_{bc}, ... distantiis linearum AB, BC, ... $A_{,}B_{,}$, $B_{,}C_{,}$, ... a puncto P, accipimus:

$$\triangle\, ABP = \frac{AB.\, h_{ab}}{2} = \frac{a.b.\sin(ab)}{2} \text{ etc.}$$

unde

$$AB = \frac{a.b}{h_{ab}} \sin(ab),\quad BC = \frac{b.c}{h_{bc}} \sin(bc), \ldots$$

$$A_{,}B_{,} = \frac{a_{,}.b_{,}}{h_{a_{,}b_{,}}} \sin(ab),\quad B_{,}C_{,} = \frac{b_{,}.c_{,}}{h_{b_{,}c_{,}}} \sin(bc), \ldots$$

Valoribus igitur quantitatum AB, BC, ... in relatione inter latera figurae propositae substitutis, ut relatio a situ punctorum A, B, C, ... in radiis projicientibus non pendeat, opus est quantitates a, b, c, ... h_{ab}, h_{bc}, ... situm illum determinantes omnino ex summa substitutionibus exire, ita ut tantum relatio inter sinus angulorum restet.

Talem relationem vocabimus *projectivam*, (relation métrique projective).

Projectivae relationes figurae propositae eodem modo pro sinubus angulorum inter radios projicientes valebunt, nam quantitates a, b, c, ... h_{ab}, h_{bc}, ..., quae non dependentes a singulari quadam sumtione exire debeant, exibunt factores omnibus terminis communes, ita ut nonnisi relatio inter sin (ab), sin (bc), ...

[7]) Poncelet, traité des propriétés projectives, p. 5—13.

restet ejusdem modi atque quae inter distantias AB, BC, ..., locum habuerit.

Vice versa:

Relatione inter sinus angulorum projicientium datae figurae tali posita, ut substituendo respondentes distantias relatio eruatur nova, quae praemissis projectivae conditionibus satisfaciat, haec relatio etiam pro distantiis valebit omnium figurarum, quae projectiones illius haberi possunt.

Exemplum simplicissimum et usitatissimum talis relationis projectivae est *divisio harmonica*:

$$AX : AY = BX : BY$$

vel

$$AX . BY = AY . BX;$$

si a puncto quovis P centro projectionis radios ducimus per haec quatuor puncta harmonica, obtinemus significationibus supra datis utentes atque altitudinem communem h vocantes:

$$\frac{ax}{h} \sin(ax) . \frac{by}{h} \sin(by) = \frac{ay}{h} \sin(ay) . \frac{bx}{h} \sin(bx).$$

unde

$$\sin(ax) . \sin(by) = \sin(ay) . \sin(by),$$

relatio eadem inter sinus angulorum projicientium, atque supra inter distantias respondentes; — quodsi ad arbitrium lineam rectam G, per hunc fascem radiorum ducimus, substituendo pro sin (ax), ... valores:

$$\sin(ax) = \frac{h_, . A_,X_,}{a_, . x_,}, \ldots$$

accipimus: $A_,X_, . B_,Y_, = A_,Y_, . B_,X_,$

unde sequitur, qualibet linea recta fascem radiorum harmonicorum secari in quatuor punctis harmonicis.

Harmonici planorum fasces et generatim fasces projectivi (faisceaux projectifs) planorum vel radiorum similibus gaudent relationibus; sed his omissis jam perscrutemur, quaenam inde ad theoriam reciprocarum polarium eruantur.

§ 9.

Supra vidimus, si inter sinus angulorum formatorum a planis in linea aliqua recta coëuntibus relatio quaelibet valeat, ean-

dem etiam sinubus angulorum, quos radii a centro sphaerae directricis per respondentes in linea quadam recta sitos polos illorum planorum ducti inter se includant, obvenire: jam scimus, quae si relatio sit projectiva, fore ut eadem pro intervallis respondentium punctorum intersectionis lineae rectae ad arbitrium per systema planorum ductae valeat.

Inde hoc fluit theorema etiam generalius:

„Si qua relatio projectiva inter latera planae cujusvis figurae valet, eadem inter sinus angulorum inclusorum a respondentibus planis polaribus punctorum angularium hujus figurae valebit, quae plana omnia in eodem puncto, polo plani propositae figurae, coëunt et vice versa: — porro per hoc systema planorum recta qualibet linea ducta, intervalla punctorum intersectionis eadem relatione projectiva gaudent atque sinus respondentium angulorum inter plana inclusorum et vice versa.“

Theoremata similia etiam pro harmonicis vel projectivis fascibus linearum, vel linearum et planorum valent*). Ad disquisitiones sequentes sufficit scire, harmonicas proprietates cujusvis figurae immutatas posse ad reciprocam polarem transferri, scilicet respectu habito, num harmonicae proprietates planis, lineis an punctis obveniant.

§ 10.

Ceterum quanta fertilitate, quanta abundantia sit theoria polarium reciprocarum, ex sequentibus elucebit, ubi conemur graviorum quaedam de superficiebus confocalibus theorematum probare, imprimis quae ab illustrissimo *Chasles* in historia geometriae**) demonstranda sint proposita: — sine magno negotio

*) Conf. tractatum Ill. Poncelet in diar. Crell. IV, 60—68.

**) Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, par M. Chasles, ancien élève de l'école polytechnique, Bruxelles 1837. In ling. Germ. transl. a Sohncke sub titulo „Geschichte der Geometrie, hauptsächlich in Bezug auf die neuern Methoden —“ Halae 1839.

ope legis reciprocitatis modo adumbratae theoremata illa eruemus, quorum directa deductio analytica maximas involveret difficultates.

Ceterum theoremata illa eodem fere tempore ab Ill. C. G. I. Iacobi reperta et in diar. Crell. XII, 137 sequ. publicata sunt, atque illo ex tempore a geometris, imprimis Francogallicis et Anglicis, elaborabantur et dilatabantur. Certo etiam tali quasi cultu superficierum confocalium haec theoremata alicubi jam probata erunt, tamen mihi ipsi huc usque nondum accidit, ut talem demonstrationem inspicerem, solo excipiendo theoremate de lineis curvaturae superficierum confocalium, de quo suo loco notatu digna adjiciam.

DE SUPERFICIEBUS CONFOCALIBUS.

§ 11.

Aequatio systematis reciproci polaris.

Supra vidimus aequationem systematis superficierum confocalium:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \quad (C).$$

brevius

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1$$

Hoc systema respectu sphaerae concentricae directricis

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad (S).$$

polarisemus, i. e. superficies quaeramus limitares plani polaris puncti alicujus ξ, η, ζ paullatim singulas superficies (C) percurrentis: aequatio plani polaris puncti ξ, η, ζ respectu directricis (S) est:

$$x\xi+y\eta+z\zeta=r^2 \qquad 1.$$

porro quum ξ, η, ζ in superficiebus confocalibus versetur, habemus

$$\frac{\xi^2}{\alpha}+\frac{\eta^2}{\beta}+\frac{\zeta^2}{\gamma}=1: \qquad 2.$$

ut jam aequationem systematis limitaris variantibus coordinatarum ξ, η, ζ valoribus obtineamus, differentiemus hanc utramque aequationem respectu ξ et η, ζ functione quantitatum ξ et η habita, tali modo fluit ex aequatione (1):

$$\frac{d\zeta}{d\xi}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{d\zeta}{d\eta}=-\frac{y}{z}$$

ex aequatione (2):

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{\xi\gamma}{\alpha\zeta}, \quad \frac{d\zeta}{d\eta} = -\frac{\eta\gamma}{\beta\zeta}$$

unde

$$\frac{\xi}{\alpha x} = \frac{\eta}{\beta y} = \frac{\zeta}{\gamma z} \quad 3 \text{ et } 4.$$

jam eliminemus ex his aequationibus 1—4 quantitates ξ, η, ζ: accipimus valoribus quantitatum η et ζ in (1) et (2) substitutis:

$$\xi\ (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) = r^2 \alpha x$$

$$\xi^2 (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) = \alpha^2 x^2$$

unde

$$\frac{r^4 \alpha^2 x^2}{(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)^2} = \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}$$

i. e.

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = r^4$$

vel

$$\left.\begin{array}{l} (a^2 + \lambda)\ x^2 + (b^2 + \lambda)\ y^2 + (c^2 + \lambda)\ z^2 = r^4 \\ \text{seu} \\ a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + \lambda\ (x^2 + y^2 + z^2) = r^4 \end{array}\right\} \text{(P.)}$$

aequatio systematis reciprocarum polarium, multo facilius analysi tractanda atque aequatio (C) systematis superficierum confocalium.

§ 12.

Aequatio (P) est primi gradus respectu λ: quare cuique puncto x, y, z unus realis parametri λ valor respondet, i. e. *„quodvis spatii punctum unica systematis (P) superficies transit:“*

Inde hoc fluit theorema respiciens superficies confocales;

„Quodvis planum tangit unicam superficierum confocalium.“

Vice versa:

„Ad duas superficies confocales propositas planum utramque tangens duci nequit.“

Excipiendi hinc videntur excentrici conici, quos supra vidimus (§ 2) ad systema superficierum confocalium perti-

nere: at apud eos revera plana tangentialia, scilicet quae omnes in eodem superficiei praepositae puncto coëuntes lineas tangentes contineant, locum habere non possunt, nisi forte plana illos conicos ipsos continentia cos tangentia habemus.

Omnes parametri λ valores positivi procreant Ellipsoidas eo magis se coarctantes quo parameter λ augeat, quia quadrata semiaxium sunt

$$\frac{r^4}{a^2+\lambda},\ \frac{r^4}{b^2+\lambda},\ \frac{r^4}{c^2+\lambda}.$$

Pro valore $\lambda = x$ superficies (P) se ad punctum quoddam, commune superficierum centrum, reducunt.

Primi parametri λ valores negativi eodem modo Ellipsoidas exhibent, donec valore $\lambda = - c^2$ z—axis in infinitum se prolonget, igitur superficies fiat cylindrus ellipticus, perpendicularis in xy—plano.

Tum superficies se retorquet in Hyperboloiden semel partitam atque hujus manet generis omnibus pro valoribus parametri λ inter $- c^2$ et $- b^2$: valore $\lambda = - b^2$ y—axis fit infinita, quare superficies cylindrus hyperbolicus, perpendicularis in xz—plano. Quodsi λ porro diminuat, superficies se retorquet in Hyperboloiden bipartitam, cujus x—axis realis denique pro $\lambda = - a^2$ se in infinitum producit: hic valor parametri λ et majores negativi non jam superficies reales exhibent.

Systema igitur superficierum (P) tria continet genera superficierum, separata per duos cylindros: hi cylindri spatium infinitum in tres dividunt partes, definitas proprietatibus sequentibus: Intra cylindrum ellipticum quodlibet punctum in Ellipsoide quadam systematis (P) situm est: in spatio altero, i. e. inter ellipticum et hyperbolicum cylindrum omnibus punctis Hyperboloidae semel partitae respondent: denique intra hyperbolicum cylindrum per quodquod punctum Hyperboloides quaedam systematis bipartita duci potest.

§ 13.

De plano tangentiali.

Primum quaeramus, num planum quodvis

$$Ax + By + Cz = D \qquad (E)$$

per systema (P) ad arbitrium ductum, quandam superficiem hujus systematis tangat: — quem ad finem polus hujus plani respectu superficiei cum puncto contactus coincidat, i. e. in plano ipso situs sit oportet. Polus plani (E) respectu superficiei

$$(a^2 + \lambda)\, x^2 + (b^2 + \lambda)\, y^2 + (c^2 + \lambda)\, z^2 = r^4 \qquad P.$$

ubi λ jam certum habet valorem, est

$$x = \frac{r^4}{D} \cdot \frac{A}{a^2 + \lambda}$$

$$y = \frac{r^4}{D} \cdot \frac{B}{b^2 + \lambda} \quad \text{(vid. § 38.)}$$

$$z = \frac{r^4}{D} \cdot \frac{C}{c^2 + \lambda}$$

quare quum polus in plano (E) versari debeat:

$$\frac{A^2}{a^2 + \lambda} + \frac{B^2}{b^2 + \lambda} + \frac{C^2}{c^2 + \lambda} = \frac{D^2}{r^4} \quad (1)$$

aequatio conditionalis, ut planum (E) superficiem (P) tangat.

Aequatio (I) est tertii gradus respectu parametri λ, quae tres exhibet parametri λ valores nec non qui omnes, ut jam ostendemus, reales sunt: nam posito

$$\frac{A^2}{a^2 + \lambda} + \frac{B^2}{b^2 + \lambda} + \frac{C^2}{c^2 + \lambda} - \frac{D^2}{r^4} = f(\lambda)$$

ut λ omnes valores ab ∞ usque ad $-a^2$ percurrat, sequitur:

pro $\lambda = \infty$ fit $f(\lambda) = -\dfrac{D^2}{r^4}$ i. e. negativa

pro $\lambda = -c^2 + \varepsilon$ fit $f(\eta) = +\infty$

pro $\lambda = -c^2 - \varepsilon$ fit $f(\lambda) = -\infty$

pro $\lambda = -b^2 + \varepsilon$ fit $f(\lambda) = +\infty$

pro $\lambda = -b^2 - \varepsilon$ fit $f(\lambda) = -\infty$

pro $\lambda = -a^2 + \varepsilon$ fit $f(\lambda) = +\infty$

$f(\lambda)$ igitur ter transit a negativo ad positivum i. e. per zero, quod $f(\lambda)$ functio est continuata: vel aequatio (I) tribus gau-

det radicibus realibus, quae continentur

$$\text{inter } \lambda = +\infty \text{ et } \lambda = -c^2,$$
$$\text{inter } \lambda = -c^2 \text{ et } \lambda = -b^2,$$
$$\text{inter } \lambda = -b^2 \text{ et } \lambda = -a^2:$$

unde hoc fluit theorema:

„Quodvis planum tres systematis (P) superficies tangit, scilicet (§ 12) *Ellipsoiden, Hyperboloiden semel partitam, Hyperboloiden bipartitam.“*

§ 14.

Problema inversum.

„Propositis tribus superficiebus (P), scilicet Ellipsoide, Hyperboloide semel et bipartita, planum invenire has superficies simul tangens:“

Propositis superficiebus P_1, P_2, P_3 facile est intellectu, hoc problema eo redire, ut ope trium aequationum

$$\frac{A^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{B^2}{b^2+\lambda_1} + \frac{C^2}{c^2+\lambda_1} = \frac{D^2}{r^4} \qquad 1.$$
$$\frac{A^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{B^2}{b^2+\lambda_2} + \frac{C^2}{c^2+\lambda_2} = \frac{D^2}{r^4} \qquad 2.$$
$$\frac{A^2}{a^2+\lambda_3} + \frac{B^2}{b^2+\lambda_3} + \frac{C^2}{c^2+\lambda_3} = \frac{D^2}{r^4} \qquad 3.$$

valores relationum $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ exhibitos in aequatione plani (E)

$$Ax + By + Cz = D$$

substituamus: aequatio hoc modo eruta pertinebit ad planum quaesitum tres superficies P_1, P_2, P_3 simul tangens.

Quum nonnisi quadrata relationum $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ ex aequationibus 1—3 exhibere liceat, coefficientes in aequatione plani tangentialis erunt expressiones radicales cum signis ambiguis, ita ut aequatio plani quaesita hac gaudeat forma: *)

$$\pm lx \pm my \pm nz = 1.$$

*) Aequatione vera hujus plani tangentialis confirmatur, quod supra alia

Systema octo planorum: haec enim aequatio octo permittit signorum combinationes:

1.	$+, +, +$.	5.	$-, -, -$.
2.	$+, +, -$.	6.	$-, -, +$.
3.	$+, -, +$.	7.	$-, +, -$.
4.	$-, +, +$.	8.	$+, -, -$.

haec octo plana hisce inter se gaudent relationibus: notum est, angulum w duorum planorum

$$lx + my + nz = 1$$
$$l_{,}x + m_{,}y + n_{,}z = 1$$

hac definiri formula:

$$\sin^2 w = \frac{(mn_{,} - m_{,}n)^2 + (nl_{,} - n_{,}l)^2 + (lm_{,} - l_{,}m)^2}{(l^2 + m^2 + n^2)(l_{,}^2 + m_{,}^2 + n_{,}^2)}$$

inde sequitur, ut sit $\sin w = o$, i. e. plana inter se parallela, ubi

$$mn_{,} = m_{,}n$$
$$nl_{,} = n_{,}l$$
$$[lm_{,} = l_{,}m]$$

vel:

$$\frac{l}{l_{,}} = \frac{m}{m_{,}} = \frac{n}{n_{,}}$$

itaque quum in aequationibus nostris respondentes coefficientes signis omissis inter se aequales sint, plana inter se parallela erunt ea, quorum in aequationibus respondentes coefficientes signis gaudent oppositis: quare erunt parallela

plana 1 et 5, 3 et 7,
2 et 6, 4 et 8:

---

obtinuimus via, ad quaslibet ternas diversorum generum superficies (P) planum eas simul tangens duci posse: hac enim in aequatione

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}\,.\,x \\ +&\sqrt{\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}\,.\,y \\ +&\sqrt{\frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}\,.\,z \end{aligned}\right\} = r_{,}^2$$

ubi expressiones sub radicibus reales sunt, simodo duo valores parametri λ, alter inter $-c^2$ et $-b^2$, alter inter $-b^2$ et $-a^2$, continentur et $a > b > c$.

Porro omnia plana eodem intervallo ab initio coordinatarum distant: nam expressio perpendiculi ab initio coordinatarum in planum

$$lx + my + nz = 1$$

demissi, scilicet

$$p = \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

signo omisso pro omnibus octo planis eadem est: plana igitur quaterna in eodem axium puncto concurrunt, itaque:

„*Propositis ternis superficiebus (P) diversorum generum, semper octona possunt duci plana eas simul tangentia: haec plana, bina inter se parallela, omnia eodem intervallo ab initio coordinatarum distant, i. e. rectum formant octaëdrum, coordinatis axibus principalibus utens.*“

Theoremata inde et ex paragraphis antecedentibus ope legis reciprocitatis fluentia nonnisi confirmant proprietates jam in § 2 de superficiebus confocalibus constitutas: quare liceat nobis ea praetermittere.

§ 15.

Jam planum *duas* superficies (P) propositas tangens ducamus: Superficies sint:

$$a^2x^2+ b^2y^2+ c^2z^2+ \lambda_1 \, (x^2+ y^2+ z^2) = r^4 \qquad P_1$$
$$a^2x^2+ b^2y^2+ c^2z^2+ \lambda_2 \, (x^2+ y^2+ z^2) = r^4 \qquad P_2$$

et resp. puncta contactus x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2: ex cognita analytica expressione plani tangentis superficiem $\varphi = o$:

$$(x-\xi) \frac{d\varphi}{dx} + (y-\eta) \frac{d\varphi}{dy} + (z-\zeta) \frac{d\varphi}{dz} = o$$

aequationem obtinemus plani tangentis superficiem (P_1):

$$a^2xx_1 + b^2yy_1 + c^2zz_1 + \lambda_1 \, (xx_1 + yy_1 + zz_1) = r^4$$

atque quum hoc planum superficiem P_2 tangere i. e. punctum x_2, y_2, z_2 continere debeat:

$$a^2x_1x_2 + b^2y_1y_2 + c^2z_1z_2 + \lambda_1 \, (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = r^4$$

eodem modo est aequatio plani tangentis alteram superficiem (P_2):

$$a^2xx_2 + b^2yy_2 + c^2zz_2 + \lambda_2 \, (xx_2 + yy_2 + zz_2) = r^4$$

et quod punctum x_1, y_1, z_1 in eo situm est:

$$a^2x_1x_2 + b^2y_1y_2 + c^2z_1z_2 + \lambda_2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = r^4 \quad 2.$$

Hinc sequitur subtrahendo aequationes (1) et (2):

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = 0$$

et quod λ_1 a λ_2 diversum ponimus:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \qquad \text{III.}$$

Hac relatione exprimitur, lineas jungentes utrumque punctum contactus cum initio coordinatarum, i. e. cum communi systematis (P) centro, inter se esse perpendiculares: scilicet distantia punctorum 1 et 2 est:

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{aligned} \qquad 3.$$

quia summa productorum binarum coordinatarum ex aequatione (III) par est zero: expressio (3) eadem est atque hypotenusae trianguli rectangularis, cujus cathetae sunt diametri per puncta contactus, ergo:

„*Puncta, in quibus planum aliquod duas superficies (P) tangit, a centro systematis communi seu sphaerae directricis sub angulo recto apparent.*"

Inde ope § 7 fluit:

„*Superficies confocales undique se sub angulis rectis secant, i. e. orthogonales sunt.*"

Ex hoc uno theoremate omnes deducemus proprietates superficierum (P):

§ 16.

Primum liquet, si ad duas propositas superficies (P) omnia ducamus plana eas simul tangentia, i. e. his superficiebus circumscribamus superficiem devolubilem, limitarem horum planorum, curvas contactus hac gaudere proprietate:

„*Puncta contactus cujusvis eas tangentis plani seu binarum linearum tangentium, in eodem plano sitarum, a centro sphaerae directricis sub angulo recto apparent.*"

In polari reciproca respondet (§ 4) superficiei circumscriptae devolubili curva intersectionis duarum superficierum confocalium et duabus curvis contactus superficies

confocalibus superficiebus circumscriptae devolubiles, et quae per curvam intersectionis ductae sunt: harum igitur generatrices rectae, in eodem curvae intersectionis puncto coëuntes, perpendiculares erunt inter se: et quum porro perpendiculares sint in linea curvam intersectionis in eo puncto tangente, generatrices utriusque superficiei devolubilis normales erunt ad alteram superficiem confocalem: unde sequitur curvam intersectionis esse utriusque superficiei lineam curvaturae*) i. e.:

„Superficies confocales se invicem secant in lineis curvaturae.“

Inde concludere licet, conicos excentricos, qui ad systema superficierum confocalium pertineant (§ 2), esse loca umbilicorum superficierum confocalium: scilicet ellipsin in xy-plano locum umbilicorum Hyperboloidarum bipartitarum, hyperbolen in xz-plano Ellipsoidarum confocalium: conicus denique excentricus in yz-plano imaginarius est eodem modo atque umbilici Hyperboloidarum semel partitarum**).

Porro patet, demonstrationem supra datam de superficiebus confocalibus seu orthogonalibus s. g. eodem modo valere generatim pro superficiebus orthogonalibus cujusvis gradus: conditioni enim orthogonalitatis in reciprocis polaribus haec alia respondet:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

cujus aequationis solius ope theorema praemissum probavimus***).

§ 17.

Jam theorema adjiciamus, ex antecedente continuo fluens, simulatque aequationes (1) et (2) (§ 15) dicimus esse lineae simul tangentis superficies P_1 et P_2 in punctis 1 et 2:

*) **Monge**, application de l'analyse à la géométrie, Par. 1809, p. 108 sequ.

) **Dupin, développemens de la géométrie p. 266—287; 303—308.

***) **Dupin**, dével. d. l. g. p. 238—242; 327—330.

„Puncta contactus cujusvis lineae duas superficies (P) simul tangentis a centro sphaerae directricis sub angulo recto apparent.“

Hoc ex theoremate haecce eruuntur theoremata ope theoriae reciprocarum polarium:

„Si in punctis contactus cujusvis lineae duas superficies confocales simul tangentis plana ducimus tangentia respondentes superficies, haec plana inter se perpendicularia sunt.“

i. e.

„Superficies confocales, a quovis spatii puncto conspiciantur, orthogonales esse videntur.“

Hoc theorema etiam hoc modo potest pronuntiari:

„Coni systemati superficierum confocalium circumscripti, quovis spatii puncto vertice communi gaudeant, sub angulis rectis se invicem secant.“

§ 18.

Itaque si per punctum p contactus plani T superficiem aliquam P tangentis lineas ducimus in hoc plano alias superficies P_1, P_2, ... tangentes, omnia nova puncta contactus p_1, p_2, ... adversus punctum p a centro systematis sub angulo recto apparebunt, i. e. sita erunt in linea quadam G recta, ipsa adversus p sub angulo recto apparente: hinc concluditur, omnes lineas polares puncti p respectu intersectionum plani T cum superficiebus (P) cum eadem hac linea G coincidere, et quum planum polare puncti alicujus respectu superficiei cujusvis s. g. locus sit linearum polarium hujus puncti respectu intersectionum planorum per punctum et superficiem ductorum, plana polaria puncti p respectu singularum superficierum (P) omnia se invicem secare eadem in linea: tandem, — quum quodlibet spatii punctum in quadam systematis (P) superficie situm sit, (§ 12), ita ut punctum contactus cujusdam plani haberi possit: —

„Plana polaria cujusvis puncti p respectu systematis (P) omnia in eadem linea coëunt: haec linea adversus punctum p a centro sphaerae directricis sub angulo recto apparet.“

Hinc sequitur theorema fere gravissimum ad theoriam superficierum confocalium:

„Poli cujusvis plani respectu singularum superficierum confocalium in linea quadam recta continentur.“

Haec linea perpendicularis est in plano proposito et normalis ad eam systematis superficiem, quae a plano in pede perpendiculi tangitur.

Jam adjiciamus, quod theorema e praemisso fluat, intersectione planorum polarium cujusvis puncti respectu duarum superficierum habita linea imaginariam earum intersectionem tangente:

„Superficies (P) se invicem dissecant in eadem curva duplicis curvaturae, attamen imaginaria, ita ut easdem habeant proprietates, atque superficies eadem curva intersectionis gaudentes:“

Theorema analogum reciprocarum polarium est:

„Superficies confocales iisdem gaudent proprietatibus, atque systema superficierum eidem superficiei devolubili inscriptarum.“

§ 19.

Quum puncta ipsa, in quibus planum aliquod tres superficies (P) tangit, ad systema curvarum intersectionis pertineant, linea, in qua cujusvis horum punctorum plana polaria respectu superficierum (P) concurrunt, continebit duo reliqua puncta contactus, unde sequitur:

„Terna cujusvis plani puncta contactus ea gaudent proprietate, ut linea polaris respectu intersectionis plani cum qualibet superficie (P) unicuique respondens, contineat utrumque reliquum punctum contactus.“

Vel:

„*Terna cujusvis plani tres superficies (P) simul tangentis puncta contactus systema sunt conjugatorum punctorum respectu cujuslibet superficiei (P).*

Hinc sequitur:

Plana tangentialia ad quodvis ternis superficiebus confocalibus commune punctum ducta harmonice sunt conjugata respectu cujuslibet superficiei confocalis, i. e. polus cujusque horum planorum in ambobus reliquis, ideo in eorum linea intersectionis, situs est:

Hoc theorema sic quoque pronuntiare licet:

„*Lineae in quovis ternis superficiebus confocalibus communi puncto eas tangentes inter se perpendiculares sunt* (§ 15) *atque linea cujusque earum polaris respectu singularum superficierum confocalium in plano ambarum reliquarum sita est.*“

Ducto igitur ad arbitrium plano per hoc systema, puncta intersectionis cum his lineis tangentibus erunt systema ternorum punctorum conjugatorum, i. e. linea bina eorum jungens erit polaris tertii respectu cujusvis superficierum cum hoc plano intersectionis.

Jam adjiciamus casum specialem, quo vulgo utantur ad definiendos excentricos conicos, qui in superficiebus s g., ut Ill. *Chasles* ostendit, locum teneant focorum in conicis, scilicet:

„*Linea normali et plano tangentiali ductis in puncto ad arbitrium in superficie aliqua s. g. sito quodvis planum superficiei principale in puncto quodam et in linea recta perrumpitur: hoc punctum polus est lineae rectae respectu cujusdam conici in hoc plano principali siti, supra vocati excentrici.*“

Hi excentrici conici, quibus polares reciproci cylindri inter superficies (P) (§ 12) respondent, eodem modo atque illi quasi transitum formant, Ellipsis in xy-plano Ellipsoi-

darum ad Hyperboloidas semel partitas, Hyperbole in xy-plano a semel ad bipartitas Hyperboloidas.

Nota. Theoremata ab Ill. *Chasles* de proprietatibus conicorum excentricorum proposita omnia ad confocales superficies generatim extendere licet: quare et quia non eo tendimus, ut investigemus proprietates analogas focorum conicorum in excentricis superficierum s. g. conicis, omissis his curvis theoremata generalia superficierum confocalium deducemus.

§ 20.

Supra vidimus (§ 18), lineam jungentem bina puncta contactus polarem esse tertii respectu cujusvis intersectionis plani tangentialis cum systemate (P): hinc sequitur, ut si quam lineam in hoc plano per quodlibet punctum contactus ducamus, punctum intersectionis cum linea ambo reliqua jungente sit quartum harmonicum ad illud punctum et bina puncta intersectionis hujus lineae cum superficiebus (P): eodem modo diametri per haec quaterna puncta harmonica erunt harmonice conjugatae, nec non diametri priores, quia inter se perpendiculares sunt (§ 18), ex theorematibus harmonicarum relationum notis, cum binis diametris posterioribus angulos includent, iisdem sinubus gaudentes, unde:

„*Qualibet linea superficiem aliquam (P) tangente* —“ vel quia quaelibet linea ad arbitrium in spatio sita quandam superficiem (P) tangit:

„*Qualibet ad arbitrium in spatio ducta linea singulae superficies (P) in binis punctis perrumpuntur, quae a centro sphaerae directricis adversus punctum, in quo illa linea quandam superficiem (P) tangit, sub angulis apparent eodem sinu gaudentibus.*“

Intersectionibus planis respondent (§ 6) in systemate reciproco polari coni circumscripti, quare hae superficierum confocalium proprietates ex antecedentibus eruuntur:

„Planum quodvis ad arbitrium per lineam duas superficies confocales in puncto quolibet intersectionis tangentem ductum diffindit conum alicui superficiei confocali circumscriptum atque hoc puncto vertice gaudentem in duabus lineis, adversus tangentem illam eodem sub angulo inclinantibus.“

Hinc concludere licet:

„Coni a puncto spatii quolibet confocalibus superficiebus circumscripti, iisdem gaudent axibus principalibus, scilicet lineis intersectiones seu lineas curvaturae trium systematis superficierum in illo puncto concurrentium tangentibus, vel normalibus harum superficierum in eodem puncto.“

Porro ex praemissis sequitur:

„Plana tangentialia per quamvis lineam, quae superficiem propositam s. g. tangat, ducta ad superficiem aliquam propositae confocalem, adversus planum priorem superficiem tangens sub eodem angulo inclinant.“

Vel:

„Si a puncto spatii quolibet conos circumscribimus duabus confocalibus superficiebus et plana tangentialia per generatricem quamvis alterius coni ad eum ipsum atque ad alterum ducimus, utrumque planum posterius adversus prius sub eodem angulo inclinat.“

§ 21.

Ubi generatrices, in quibus planum tangens Hyperboloiden semel partitam diffindit, singularem hujus plani intersectionem respicimus, ex antecedente hoc theorema non minus notatu dignum sequitur:

„Lineis rectis ad arbitrium in plano quolibet ductis generatrices, in quibus hoc planum tangentiale Hyperboloiden quandam systematis semel partitam secat, in binis perrumpuntur punctis, quae adversus singula puncta, in quibus illae

lineae quasdam superficies (P) tangunt, a centro sphaerae directricis sub iisdem apparent angulis."

Ergo:

Si a puncto spatii quolibet conum circumscribimus alicui superficiei s. g. atque per generatricem ejus aliquam planum ducimus eum ipsum tangens nec non plana per generatrices Hyperboloides semel partitae confocalis, per illud punctum ductae, hoc utrumque planum adversus illud sub eodem angulo inclinat.

Haec est proprietas quaedam *lineas focales* conorum s. g. definiens*), unde:

„*Coni a puncto spatii quolibet superficiebus confocalibus circumscripti iisdem gaudent lineis focalibus, scilicet generatricibus Hyperboloides cujusdam semel partitae confocalis per illud punctum ductae.*"

Quodsi coni circumscripti superficiebus confocalibus orthogonaliter se invicem secant (§ 17) atque iisdem gaudent axibus principalibus (§ 20), hi coni omnes habent proprietates systematis Hyperboloidarum confocalium, quarum axes evanuerunt, ita ut ipsi jure possint vocari *confocales:* — lineae focales ad systema conorum confocalium pertinent, sicut supra de excentricis conicis (§ 2) notavimus.

Jam adjiciamus theoremata analoga cylindros circumscriptos respicientia:

Vertice in infinitum abeunte coni fiunt cylindri circumscripti, quorum generatrices omnes inter se parallelae sunt: eadem ratione lineae focales inter se et cum generatricibus cylindrorum parallelae erunt, tamen eandem retinentes proprietatem, ex qua planum quodvis normale per alteram focalem ductum, intersectiones procreet cum respondentibus conis, nunc cylindris, quarum focus alter cum puncto intersectionis plani et lineae illius focalis coincidat.

---

*) Chasles in Quetelet, corresp. mathém. et phys. tome VI, p. 292.

Quum jam lineae focales inter se parallelae sint, planum illud in utraque erit perpendiculare, qua de caussa intersectiones ipsae iisdem gaudebunt focis, itaque:

„*Cylindri superficiebus confocalibus circumscripti, nec non quorum generatrices inter se parallelae sunt, ipsi sunt confocales, i. e. planis normalibus ad generatrices in conicis confocalibus diffinduntur.*“

§ 22.

Plano proposito per centrum systematis (P) ducto, unum punctorum contactus cum centro ipso coincidit (§ 12) et reliqua ambo in infinitum abeunt, ita ut planum fiat asymptotum duarum Hyperboloidarum systematis (P): non minus autem a centro ea puncta sub angulo recto apparent et diameter per utrumque ducta altera est alterius polaris respectu cujusvis superficiei (P).

Hinc sequitur fore ut plana superficiem aliquam (P) tangentia in punctis, ubi hac diametri superficiem perrumpant, bina sint parallela alteri diametro, et quum diametri inter se normales sint, perpendicularia inter se: quare puncta illa intersectionis vertices nec non diametri axes erunt principales conici cujusdam, in quo planum asymptotum superficiem propositam secet: inde hoc sequitur theorema:

„*Quovis plano diametrali superficies (P) in conicis diffinduntur eadem axium principalium directione gaudentibus.*“

Vel quod intersectiones parallelorum planorum cum singulis superficiebus inter se similes sunt et similiter sitae:

„*Quovis plano systema (P) in conicis diffinditur eadem axium principalium directione gaudentibus.*“

Scilicet axes principales parallelae sunt diametris per puncta contactus paralleli plani diametralis: vel quia etiam generatrices Hyperboloidarum semel partitarum ad systema intersectionum planarum pertinent:

„*Axes principales parallelae sunt lineis angulum inter generatrices dimidiantibus.*“

Jam perscrutemur sectiones circulares superficierum (P), in quibus directio axium principalium in arbitrio posita sit: quem ad finem aequationem plani cujusdam superficiem

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2) = r^4 \qquad (P.)$$

ubi λ jam certum habeat valorem, in circulo secantis quaeramus:

Quadrata semiaxium sunt:

$$\frac{r^4}{a^2+\lambda},\ \frac{r^4}{b^2+\lambda},\ \frac{r^4}{c^2+\lambda}$$

quare ubi parameter λ positivus et $a > b > c$, x-axis habebit minimum et z-axis summum valorem: hinc patet fore ut in intersectione xz-plani diameter quaedam exsistat ejusdem longitudinis atque y-axis: eam jam inveniamus:

Intersectio xz-plani est:

$$a^2x^2 + c^2z^2 + \lambda\,(x^2 + z^2) = r^4$$

ponamus
$$x^2 + z^2 = \frac{r^4}{b^2+\lambda}$$

unde:

$$(a^2-c^2)\,x^2 = r^4\left(1 - \frac{c^2+\lambda}{b^2+\lambda}\right) = \frac{r^4\,(b^2-c^2)}{b^2+\lambda}$$

i. e.
$$\xi^2 = \frac{r^4\,(b^2-c^2)}{(a^2-c^2)\,(b^2+\lambda)}$$
et
$$\zeta^2 = \frac{r^4\,(a^2-b^2)}{(a^2-c^2)\,(b^2+\lambda)}$$

coordinatae punctorum terminalium diametri in xz-plano, aequalis y-axi: — planum per hanc diametrum et y-axem ductum sectionem dabit duabus axibus aequalibus gaudentem i. e. circularem: — planum quaesitum y-axem continens sit:

$$Ax + Cz = o$$

et quod puncta ξ, η in eo sita sunt:

$$\frac{A}{C} = -\frac{\zeta}{\xi} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$$

unde

$$\sqrt{a^2-b^2}\,.\,x + \sqrt{b^2-c^2}\,.\,z = o, \qquad \text{IV.}$$

aequatio plani diametralis, cujus intersectio cum superficie (P) circulus est.

Aequatio (IV) a parametro λ non pendens eadem erit, quamcunque systematis (P) superficiem proposuerimus, unde sequitur:

„*Systema superficierum (P) eadem gaudet directione sectionum circularium.*"

Hoc theorema juvat nos definitione aptissima superficierum, quas adhuc significatione (P) complexi sumus.

§ 23.

Sine magno negotio haec theoremata de superficiebus (P) etiam dilatare et multiplicare possimus, sed quum omnino non unoquoque novo theoremate etiam novae et notatu dignae superficierum confocalium proprietates exhibeantur, has disquisitiones, quae fere omnes ad locum planorum polarium cujusdam puncti respectu singularum systematis (P) superficierum spectabant, jam relinquemus. Etiam theoremata antecedentis paragraphi non adjecissemus, nisi ex iis flueret definitio quaedam superficierum (P) simplex et praecisa, quam forte non inepte in omnibus theorematibus praemissis substituissemus.

Jam convertamus nos ad alia problemata theoriae nostrarum superficierum, imprimis de loco polarium propositae lineae rectae atque de loco polorum dati plani, paullatim omnibus superficiebus (P) directricibus applicatis. E fundamentis theoriae reciprocarum polarium liquebit, cur praecipue haec problemata relationibus harmonicis nitentia ad disquisitiones nostras ope legis reciprocitatis idonea sint.

§ 24.

Aequationes polaris (P)*).

Ex theoremate (§ 18) hanc polarem (P) definire licet intersectionem plani polaris puncti propositi respectu alicujus

*) Permittatur nobis, ut vocemus posthac lineam rectam, intersectionem omnium planorum polarium cujusvis puncti respectu singularum superficierum (P) polarem (P).

superficiei cum plano diametrali, perpendiculari in diametro per illud punctum.

Hinc eruuntur, si punctum est $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ propositum, aequationes hujus polaris (P):

$$(a^2+\lambda)\, x_{,}x + (b^2+\lambda)\, y_{,}y + (c^2+\lambda)\, z_{,}z = r^4$$
$$x_{,}x + y_{,}y + z_{,}z = o.$$

unde:

$$\left.\begin{array}{l}(a^2-b^2)\, x_{,}x + (c^2-b^2)\, z_{,}z = r^4 \\ (b^2-a^2)\, y_{,}y + (c^2-a^2)\, z_{,}z = r^4\end{array}\right\} V.$$

vel ponendo, lineam punctum aliquod ξ, η, ζ continere:

$$\frac{x-\xi}{(b^2-c^2)y_{,}z_{,}} = \frac{y-\eta}{(c^2-a^2)z_{,}x_{,}} = \frac{z-\zeta}{(a^2-b^2)x_{,}y_{,}}$$

aequationes non dependentes a λ, ita ut linea eadem sit, quaecunque superficierum (P) directricis locum teneat (§ 18).

§ 25.

Problema.

„Superficiem invenire, in qua omnes polares (P) puncti cujusdam $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ lineam rectam percurrentis sitae sint."

Punctum $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ versetur in linea:

$$\frac{x_{,}-\xi}{l} = \frac{y_{,}-\eta}{m} = \frac{z_{,}-\zeta}{n} \; [=f] \quad L.$$

unde:

$$x_{,} = lf + \xi,$$
$$y_{,} = mf + \eta,$$
$$z_{,} = nf + \zeta;$$

quibus valoribus in aequationibus (V) substitutis et comprehensis terminis quantitatem f continentibus:

$$f\,(l\,(a^2-b^2)\,x + m\,(c^2-b^2)\,z) = r^4 - \xi\,(a^2-b^2)\,x - \zeta\,(c^2-b^2)\,z$$
$$f\,(m\,(b^2-a^2)\,y + n\,(c^2-a^2)\,z) = r^4 - \eta\,(b^2-a^2)\,y - \zeta\,(c^2-a^2)\,z$$

unde quantitate f eliminata:

$$(b^2-c^2)(m\zeta-n\eta)\,yz + (c^2-a^2)(n\xi-l\zeta)\,zx + (a^2-b^2)(l\eta-m\xi)\,xy$$
$$+ r^4\,(lx+my+nz) = o, \; VI.$$

aequatio quaesitae superficiei limitaris: — haec aequatio secundi

est gradus nec non satisfit ei valoribus $x=o$, $y=o$, $z=o$: i. e. initium coordinatarum in hac superficie situm est: superficies porro est limitaris linearum rectarum, unde aut Hyperboloides semel partita, aut Paraboloides hyperbolica.

Facile est intellectu, superficiem esse Hyperboloiden semel partitam: nam ut Paraboloides sit hyperbolica, generatrices omnes eidem plano debent esse parallelae, quae proprietas nonnisi casibus singularibus obvenit, scilicet si linea, quam punctum $x_,$, $y_,$, $z_,$ percurrit, aliquam diffindit axem principalem: — Plana enim polaria cujuslibet puncti in axi aliqua principali, ex. gr. z-axi, siti omnia sunt inter se parallela et normalia ad hanc axem: quare lineae polares, in his planis sitae omnes xy-plano parallelae erunt, i. e. Paraboloiden hyperbolicam formabunt. Quod ut analytice probemus, longius nos abducat, praesertim quum ad nostras disquisitiones sufficiat scire superficiem esse secundi gradus, limitarem linearum rectarum (§ 6) et continentem initium coordinatarum seu centrum sphaerae directricis.

Haec proprietas superficiei posterior etiam facillime inde patet, quod initium coordinatarum ipsa superficies est systematis (P) (§ 12) ita ut quaedam linea polaris respondens lineae rectae, in qua punctum $x_{,,}$ $y_{,,}$ $z_,$ versetur, hoc punctum continere debeat: superficies enim eodem modo locus est linearum polarium lineae propositae respectu singularum superficierum (P):

Unde jam hoc eruitur theorema:

„*Locus linearum polarium propositae cujusvis lineae rectae respectu singularum superficierum (P) est Hyperboloides semel partita, in qua centrum sphaerae directricis situm est.*“

Itaque ope legis reciprocitatis (§ 6):

„*Locus linearum polarium propositae cujusvis lineae rectae respectu singularum superficierum confocalium est Paraboloides hyperbolica.*“

Vel (conf. § 18):

„Per quamlibet lineam rectam planis tangentialibus ad systema superficierum confocalium ductis, lineae normales ad has superficies per puncta contactus ductae Paraboloiden hyperbolicam formant.“

Adjiciamus quosdam casus singulares:

1) Linea L contineat initium coordinatarum, i. e. diameter sit quaelibet systematis (P), ergo:

$$m\zeta - n\eta = o$$
$$n\xi - l\zeta = o$$

unde etiam:

$$l\eta - m\xi = o.$$

inde aequatio superficiei terminalis:

$$lx + my + nz = o.$$

aequatio plani initium coordinatarum continentis, sive diametralis nec non perpendicularis in linea

$$nx = lz$$
$$ny = mz,$$

qua in linea punctum $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ versatur.

2) Linea L parallela sit cuivis axium coordinatarum, ex. gr. z-axi: ergo

$$l = o \text{ et } m = o$$

unde aequatio superficiei terminalis:

$$\eta\,(b^2-c^2)\,yz + \xi\,(a^2-c^2)\,xz = r^4z$$

i. e. $$z = o$$

$$\text{et}\quad (a^2-c^2)\,\xi x + (b^2-c^2)\,\eta y = r^4$$

aequationes duorum planorum, quorum alterum xy-planum est, alterum parallelum z-axi.

3) Punctum $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ polarem (P) quamvis (§ 24) percurrat:

Tum lineae polares omnes in puncto quodam, cui haec polaris (P) respondet, et quod nomine *poli (P)* afficere liceat, concurrunt, ita ut Hyperboloides semel partita mutetur in conum quendam, cujus vertex est polus (P), unde:

„Locus linearum polarium cujusvis polaris (P) respectu singularum superficierum (P) est conus quidam s. g., polo (P) illius polaris (P) vertice utens atque in quo centrum sphaerae directricis situm est.“

Huic theorematі respondet (§ 6) sequens:

„Locus linearum polarium propositae cujusvis lineae rectae ad aliquam superficiem confocalem normalis respectu singularum superficierum confocalium est Parabole quaedam sita in plano superficiem illam in pede normalis tangente.“

4) Si linea est in infinito sita, lineae polares omnes in initio coordinatarum coëunt, ita ut superficies terminalis mutetur in conum quendam secundi gradus, cujus vertex cum initio coordinatarum coincidit.

Nota. Posthac (§ 29) ad omnia haec theoremata redeamus.

§ 26.

Jam solvendum nobis est problema inversum, quinam sit locus polorum (P) cujusdam polaris (P), quae certa ex lege situm mutet, ex. gr. in plano quovis versetur: — Sed antequam hoc tractemus problema, paucis adumbremus verbis, num unaquaeque linea recta in plano proposito sita haberi possit polaris (P), an hujus proprietatis (§ 24) caussa certos in plano situs inire debeat, nec non quales sint hi situs in universum.

Polaris (P) cujusvis puncti in dato plano sita intersectio est hujus plani et plani diametralis, perpendicularis in diametro, quae polum plani propositi respectu cujuslibet superficiei (P) continet. Locus igitur polarium (P) in hoc plano erit intersectio hujus plani cum superficie terminali omnium planorum, singulis polis plani propositi respondentium polarium, si paullatim omnes superficies locum directricum tenent.

Polum plani

$$Ax + By + Cz = D. \qquad 1.$$

respectu superficiei

$$(a^2+\lambda)\, x^2 + (b^2+\lambda)\, y^2 + (c^2+\lambda)\, y^2 = r^4 \qquad (P.)$$

obtinemus:

$$x_{,} = \frac{r^4}{a^2+\lambda} \cdot \frac{A}{D}$$

$$y_{,} = \frac{r^4}{b^2+\lambda} \cdot \frac{B}{D}$$

$$z_{,} = \frac{r^4}{c^2+\lambda} \cdot \frac{C}{D}$$

porro aequationem plani diametralis, perpenpicularis in diametro per $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$:

$$x_{,}x + y_{,}y + z_{,}z = o \qquad 2.$$

unde substitutis valoribus modo exhibitis:

$$\frac{Ax}{a^2+\lambda} + \frac{By}{b^2+\lambda} + \frac{Cz}{c^2+\lambda} = o = f(\lambda) \qquad 3.$$

Problema nostrum jam in eo consistit, ut inveniamus superficiem terminalem hujus plani, commutandis parametri λ valoribus: — hoc vero problema nihil aliud est, nisi ut ex aequationibus

$$f(\lambda) = o \text{ et } \frac{df}{d\lambda} = o$$

parametrum λ variabilem eliminemus: aequatio (3) est:

$$\left.\begin{aligned} f(\lambda) = {} & \lambda^2(Ax + By + Cz) \\ & + \lambda\,(Ax\,(b^2+c^2) + By\,(c^2+a^2) + Cz\,(a^2+b^2)) \\ & + Axb^2c^2 + Byc^2a^2 + Cza^2b^2 \end{aligned}\right\} = o \quad 4.$$

unde respectu λ differentiando:

$$\frac{df}{d\lambda} = \left.\begin{aligned} & 2\lambda\,(Ax + By + Cz) \\ & + Ax\,(b^2+c^2) + By\,(c^2+a^2) + Cz\,(a^2+b^2) \end{aligned}\right\} = o$$

unde porro:

$$\lambda = -\frac{Ax\,(b^2+c^2) + By\,(c^2+a^2) + Cz\,(a^2+b^2)}{2\,(Ax+By+Cz)} \qquad 5.$$

quo valore in aequatione (4) substituto:

$$[Ax\,(b^2+c^2) + By\,(c^2+a^2) + Cz\,(a^2+b^2)]^2$$
$$= 4\,(Ax+By+Cz)\,(b^2c^2Ax + c^2a^2By + a^2b^2Cz)$$

vel

$$A^2x^2\,(b^2-c^2)^2 + B^2y^2\,(c^2-a^2)^2 + C^2z^2\,(a^2-b^2)^2$$
$$= 2BC\,(c^2-a^2)\,(a^2-b^2)\,yz + 2\,CA\,(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)\,zx \qquad \text{VII.}$$
$$+ 2\,AB\,(b^2-c^2)\,(c^2-a^2)\,xy$$

haec aequatio quaesitae superficiei terminalis diversorum planorum diametralium cum aequatione (I) propositi plani conjuncta exhibet curvam terminalem polarium (P) in plano proposito sitarum, unde:

„Curva terminalis polarium (P) in eodem plano sitarum est conica."

Theorema analogum superficierum confocalium est:

„Lineae normales a puncto spatii quolibet ad systema superficierum confocalium ductae conum secundi gradus formant."

Plano proposito parallelo cum qualibet axium coordinatarum, ex. gr. cum z-axi, i. e. $C = o$, aequatio VII fit:

$$A^2x^2(b^2-c^2)^2 + B^2y^2(c^2-a^2)^2 = 2AB(b^2-c^2)(c^2-a^2)xy,$$

i. e. $$[Ax(b^2-c^2) + By(a^2-c^2)]^2 = o$$

systema duorum planorum coincidentium, conjuncta aequatione plani

$$Ax + By = D$$

linea recta, parallela z-axi.

Plano parallelo z-axi respondet reciprocum polare punctum quoddam in xyplano situm, unde:

„Lineae rectae a puncto quolibet in quovis planorum principalium sito ad systema superficierum confocalium normaliter ductae, in duobus continentur planis, altero hoc plano principali, altero ad id perpendiculari."

§ 27.

Ne omittamus discutere aequationem VII, quae novum exhibeat theorema: aequatio VII exprimit superficiem quandam terminalem, scilicet quum a quantitate D non pendeat, terminalem omnium polarium (P) plano

$$Ax + By + Cz = D$$

parallelarum: — ceterum aequatio est cujusdam coni s. g., initio coordinatarum vertice gaudentis: unde

„Polares (P) respondentes polis systematis parallelorum

planorum, conum quendam s. g. tangunt, centro sphaerae directricis vertice gaudentem."

Vel:

„Lineae jungentes terna puncta, in quibus a planis parallelis superficies (P) tanguntur (§ 18), *omnes conum quendam s. g. tangunt, centro sphaerae directricis vertice gaudentem."*

Respondentia superficierum confocalium theoremata sunt:

„Superficies conicae, formatae lineis normalibus a puncto spatii quolibet ad superficies confocales ductis, inter se parallelae sunt, hoc puncto diametrum systematis aliquam percurrente."

Vel:

„Axes principales systematis conorum superficiei alicui s. g. circumscriptorum generatrices sunt superficierum conicarum parallelarum, simulac vertices eorum diametrum quamlibet superficiei propositae percurrunt."

§ 28.

Jam transeamus ad problema supra enuntiatum:

„Locum invenire polorum (P) respondentium polaribus (P) pianum aliquod propositum describentibus:"

quum modo adumbrarimus, quemadmodum id sit intelligendum.

Hoc problema idem est atque sequens: quamnam curvam polus plani propositi percurrit, simulac paullatim omnibus superficiebus (P) directricibus utimur?

Polus plani

$$Ax + By + Cz = D$$

respectu superficiei (P) cujusdam est:

$$x_{\prime} = \frac{r^4}{D} \cdot \frac{A}{a^2+\lambda},$$

$$y_{\prime} = \frac{r^4}{D} \cdot \frac{B}{b^2+\lambda},$$

$$z_{\prime} = \frac{r^4}{D} \cdot \frac{C}{c^2+\lambda},$$

unde:

$$(a^2+\lambda)\, x_, = \frac{r^4}{D} \cdot A$$

$$(b^2+\lambda)\, y_, = \frac{r^4}{D} \cdot B$$

$$(c^2+\lambda)\, z_, = \frac{r^4}{D} \cdot C$$

et eliminando variabilem parametrum λ:

$$\left.\begin{array}{l} D\,(b^2-c^2)\, y_, z_, = r^4\,(Bz_, - Cy_,) \\ D\,(c^2-a^2)\, z_, x_, = r^4\,(Cx_, - Az_,) \\ {[D\,(a^2-b^2)\, x_, y_, = r^4\,(Ay_, - Bx_,)]} \end{array}\right\} \text{VIII.}$$

projectiones curvae quaesitae in planis coordinatis: — quare curvam licet habere intersectionem quorundam cylindrorum s. g., perpendicularibus in planis principalibus, nec non initium coordinatarum continentibus: i. e. curva est quarti gradus atque initium coordinatarum continet.

Porro curva, quum sit locus polorum (P) quibusdam polaribus (P) respondentium, considerari potest intersectio quorundam conorum s. g. (§ 25, 3): hinc fluit, quodvis ejus punctum quasi verticem esse coni cujusdam s. g., cetera curvae puncta nec non initium coordinatarum continentis: etiam tria contactus puncta plani propositi cum quibusdam superficiebus (P) (§ 13), non minus poli hujus plani, in curva nostra sita erunt.

Hinc sequitur ope legis reciprocitatis:

„*Plana contactus conorum a puncto quolibet vertice communi circumscriptorum systemati superficierum confocalium superficiem quandam devolubilem limitant, quacum plana tangentialia omnia intersectionem exhibeant conicam, sc. parabolen. Tria plana principalia superficierum confocalium ipsa nec non conorum iis circumscriptorum hanc superficiem devolubilem tangunt.*“

Vel:

„*A puncto spatii quolibet lineis ad systema superficierum confocalium normaliter ductis, plana in pedi-*

bus harum normalium superficies tangentia devolubilem superficiem modo definitam limitant."

Ponendo planum propositum parallelum cuivis axi principali, ex. gr. z-axi, i. e. $C = o$, curva erit:

$$D\ (b^2 - c^2)\ yz = r^4\ Bz$$
$$D\ (c^2 - a^2)\ zx = -\ r^4\ Az$$
$$[D\ (a^2 - b^2)\ xy = r^4\ (Ay - Bx)]$$

quare curva proposita in duas discedit partes, sc.:

$$\left.\begin{array}{c} z = o \\ D\ (a^2 - b^2)\ xy = r^4\ (Ay - Bx) \end{array}\right\}\ a.$$

conicus in xy-plano atque centrum coordinatarum continens: et

$$\left.\begin{array}{c} D\ (a^2 - c^2)\ x = r^4\ A \\ D\ (b^2 - c^2)\ y = r^2\ B \end{array}\right\}\ b.$$

linea recta; z-axi parallela.

Unde eruitur:

„*Puncto proposito in plano quovis principali, lineas normales ab eo ad systema superficierum confocalium ductas, supra* (§ 26) *vidimus, in duobus esse sitas planis, altero principali, altero ad id normali: — plana tangentialia per pedes priorum normalium ducta parabolicum quendam cylindrum involvunt (a), posteriorum omnia in eadem linea recta in plano dato principali sita (b) concurrunt.*"

§ 29.

Porro ex aequationibus VIII quantitatem D eliminando obtinemus

$$A\ (b^2 - c^2)\ yz + B\ (c^2 - a^2)\ zx + C\ (a^2 - b^2)\ xy = o.$$

aequationem coni cujusdam initio coordinatarum vertice gaudentis: — hic igitur conus locus est curvarum VIII, vel potius omnium polorum systematis parallelorum planorum respectu singularum superficierum (P): at reciprorum polare systematis parallelorum planorum, quae in infinito concurrant in eadem linea, respectu superficierum (P) invenire, idem est atque locum invenire linearum polarium respondentium lineae cuidam rectae,

in infinito sitae, respectu superficierum (P), quod problema jam supra solvimus (§ 25, 4). Quodsi eodem modo in omnibus illius paragraphi theorematibus lineas rectas, quas punctum x,, y,, z, percurrit, intersectiones systematis cujusdam planorum habemus, illa theoremata ita jam pronuntiare licet:

„Locus polorum systematis planorum in eadem linea concurrentium respectu singularum superficierum (P) est Hyperboloides semel partita centrum sphaerae directricis continens.“

Unde:

„Plana principalia systematis conorum, cuivis superficiei s. g. circumscriptorum atque quorum vertices in eadem linea recta versantur, omnia Paraboloiden hyperbolicam tangunt.“

Et ex § 25, 3:

„Locus polorum systematis planorum, qualibet in Polari (P) concurrentium est conus s. g. initium coordinatarum continens.“

Ergo:

„Si linea recta proposita normalis est ad aliquam superficiem confocalem, Paraboloides hyperbolica ad Parabolen quandam (§ 25, 3) *se reducit.“*

Denique vertice coni circumscripti diametrum aliquam percurrente, Paraboloides hyperbolica se reducit ad conicum quendam in infinito situm, unde fluit:

„Plana principalia systematis conorum superficiei alicui s. g. circumscriptorum omnia superficies quasdam conicas parallelas tangunt, simulac vertices eorum diametrum quamlibet superficiei propositae percurrunt.“ (Conf. § 27.)

§ 30.

Atque ita quidem nonnullis praestantissimis superficierum confocalium s. g. proprietatibus probatis et exhaustis, corollarii loco de problemate tractabimus, quod si solvere velis, haud minus ad theoriam polarium reciprocarum spectare tibi videbi-

tur. Videlicet illud in animo nobis est problema: *ut explicentur aequationes conditionales, quibus satisfaciant opus est constantes aequationum superficierum s. g., ut sint confocales.*

Quem ad finem primo de superficiebus confocalium reciprocis polaribus earumque aequationibus disseremus: — has superficies sic definire possumus (§ 12):

„*Polares reciprocae superficierum confocalium hanc possident proprietatem, ut intersectiones cujuslibet plani eadem gaudeant directione axium principalium.*“

Vel:

„*Polares reciprocae s. c. eandem habent directionem sectionum circularium.*“

Et quum omnia theoremata praemissa hac una nixa sint proprietate:

„*Puncta contactus cujusvis lineae duas systematis superficies tangentis relationi satisfaciunt*

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = o \text{ *)}$$

sine magno negotio conditiones derivantur, quibus satisfaciant oportet coefficientes duarum aequationum s. g. exhibentium polares reciprocas superficierum confocalium.

Primum quaeramus, propositis superficiebus

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz = 1 \qquad 1.$$

et

$$A_{,}x^2 + B_{,}y^2 + C_{,}z^2 + 2D_{,}yz + 2E_{,}zx + 2F_{,}xy$$
$$+ 2G_{,}x + 2H_{,}y + 2I_{,}z = 1 \qquad 2.$$

quae sint aequationes cujusdam lineae eas in punctis 1 et 2 tangentis:

Ex aequatione plani superficiem $f = o$ tangentis:

$$(x-\xi)\frac{df}{d\xi} + (y-\eta)\frac{df}{d\eta} + (z-\zeta)\frac{df}{d\zeta} = o.$$

---

*) Hinc ope legis reciprocitatis obtinemus simplicissimam et aptissimam superficierum s. g. confocaium definitionem:

„Confocales dicuntur superficies s. g. orthogonales, i. e. quae undique sub angulo recto se invicem secant.“

eruitur aequatio plani superficiem (1) tangentis

$$\left.\begin{array}{l}(x-\xi)(A\xi+E\zeta+F\eta+G)\\ +(y-\eta)(B\eta+F\xi+D\zeta+H)\\ +(z-\zeta)(C\zeta+D\eta+E\xi+I)\end{array}\right\}=o \qquad 3.$$

vel

$$\left.\begin{array}{r}x(A\xi+E\zeta+F\eta)+y(B\eta+F\xi+D\zeta)+z(C\zeta+D\eta+E\xi)\\ +G(x+\xi)+H(y+\eta)+I(z+\zeta)\end{array}\right\}=o,$$

unde quum hoc planum puncta contactus 1 et 2 continere debeat:

$$\begin{array}{r}x_1(Ax_2+Ez_2+Fy_2)+y_1(By_2+Fx_2+Dz_2)+z_1(Cz_2+Dy_2+Ex_2)\\ +G(x_1+x_2)+H(y_1+y_2)+I(z_1+z_2)=o.\end{array}$$

vel:

$$\begin{array}{l}Ax_1x_2+By_1y_2+Cz_1z_2\\ +D(y_1z_2+y_2z_1)+E(z_1x_2+z_2x_1)+F(x_1y_2+x_2y_1) \quad =o \qquad 4.\\ +G(x_1+x_2)+H(y_1+y_2)+I(z_1+z_2)\end{array}$$

eodem modo est aequatio plani superficiem (2) tangentis:

$$\begin{array}{l}A_,x_1x_2+B_,y_1y_2+C_,z_1z_2\\ +D_,(y_1z_2+y_2z_1)+E_,(z_1x_2+z_2x_1)+F_,(x_1y_2+x_2y_1) \quad =o. \qquad 5.\\ +G_,(x_1+x_2)+H_,(y_1+y_2)+I_,(z_1+z_2)\end{array}$$

Aequationes (4) et (5) conjunctae exhibent lineam superficies (1) et (2) simul tangentem: — subtrahendo sequitur:

$$\begin{array}{l}(A-A_,)x_1x_2+(B-B_,)y_1y_2+(C-C_,)z_1z_2\\ +(D-D_,)(y_1z_2+y_2z_1)+(E-E_,)(z_1x_2+z_2x_1)+(F-F_,)(x_1y_2+x_2y_1)\\ +(G-G_,)(x_1+x_2)+(H-H_,)(y_1+y_2)+(I-I_,)(z_1+z_2)=o \qquad 6.\end{array}$$

Quodsi propositae superficies (1) et (2) polares superficierum confocalium esse debent, coordinatae punctorum, in quibus linea quaelibet utramque tangit, satisfaciant oportet relationi

$$x_1x_2+y_1x_2+z_1z_2=o: \qquad III.$$

qua de caussa aequationes (6) et (III) nonnisi factore communi inter se differre possunt*): unde fluunt hae octo conditiones:

---

*) Notum est insequens principium generale: Duae vel plures aequationes propositae, quae pro pluribus variabilium valoribus simul valere debent, atque constantes in iis continentur, nonnisi factore communi inter se differre possunt.

$$A - A_{,} = B - B_{,} = C - C_{,},$$
$$D = D_{,}, \quad E = E_{,}, \quad F = F_{,}, \qquad \text{IX.}$$
$$G = G_{,}, \quad H = H_{,}, \quad I = I_{,}.$$

§ 31.

His praemissis facile conditiones deducemus, quibus coefficientes aequationum superficies confocales ipsas exhibentium satisfacere oporteat:

Primum ponamus, *superficies propositas centro cummuni gaudere initio coordinatarum:*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 1. \qquad 1.$$
$$a_{,}x^2 + b_{,}y^2 + c_{,}z^2 + 2d_{,}yz + 2e_{,}zx + 2f_{,}xy = 1. \qquad 2.$$

Ex antecedente liquet, conditiones confocalitatis harum superficierum aptissime ex aequationibus polarium reciprocarum derivari, qua de caussa jam has aequationes deducemus:

Quem ad finem recordemur (§ 4), polarem cujusvis superficiei reciprocam esse locum polorum respondentium planis eam tangentibus respectu superficiei directricis: itaque hac ratione aequationem polaris reciprocae obtinebimus:

Sit proposita superficies:

$$F\,(x,\; y,\; z) = o$$

quae ut plano aliquo (E)

$$lx + my + nz = 1.$$

tangatur, constantes satisfaciant oportet relationi cuidam

$$f\,(l,\; m,\; n) = o;$$

quodsi ex hac et aequationibus poli hujus plani respectu superficiei directricis:

$$x = \varphi\;(l,\; m,\; n)$$
$$y = \psi\;(l,\; m,\; n)$$
$$z = \chi\;(l,\; m,\; n)$$

eliminamus constantes l, m, n, quibus plano (E) situs certus attribuitur, aequationem eruimus loci polorum plani (E), perpetuo superficiem (F) tangentis, i. e. aequationem quaesitae polaris reciprocae.

Sed antequam id principium ad superficiem nostram (1)

applicemus, ostendemus, quomodo coordinatae poli cujusvis plani propositi obtineantur.

Aequatio plani polaris ad punctum ξ, η, ζ pertinentis respectu directricis (I) est:

$$\xi(ax+fy+ez)+\eta(by+dz+fx)+\zeta(cz+ex+dy) = 1$$

quodsi punctum ξ, η, ζ planum

$$lx+my+nz = 1 \qquad E.$$

percurrit, planum ejus polare circa polum hujus plani versatur: hinc concluditur, quum oporteat aequationes plani polaris et ipsius (E) simul valeant pro infinite multis coordinatarum ξ, η, ζ valoribus (conf. § 37), respondentes variabilium ξ, η, ζ coefficientes in utraque aequatione eosdem esse, unde:

$$ax + fy + ez = l$$
$$fx + by + dz = m$$
$$ex + dy + cz = n$$

quibus ex aequationibus tribus facile coordinatae poli eruuntur:

$$x = \frac{l(d^2-bc)+m(cf-de)+n(be-df)}{\Delta}$$

$$y = \frac{m(e^2-ac)+n(ad-ef)+l(cf-de)}{\Delta}$$

$$z = \frac{n(f^2-ab)+l(be-df)+m(ad-ef)}{\Delta}$$

ubi Δ est ***Determinans*** systematis linearis

$$\begin{matrix} a, & f, & e, \\ f, & b, & d, \\ e, & d, & c: \end{matrix}$$

$$\Delta = a(d^2-bc)+f(cf-de)+e(be-df)$$
$$= ad^2-abc+cf^2-2def+be^2$$

Jam significemus:

$$d^2-bc = A \quad , \quad ad-ef = D,$$
$$e^2-ac = B \quad , \quad be-df = E,$$
$$f^2-ab = C \quad , \quad cf-de = E.$$

unde brevius obtinemus:

$$x = \frac{Al + Fm + En}{\Delta}$$

$$y = \frac{Bm + Dn + Fl}{\Delta}$$

$$z = \frac{Cn + El + Dm}{\Delta}$$

coordinatas poli respondentis plano (E) respectu directricis (1): supra vidimus, hoc planum (E) superficiem (1) tangere, ubi polus in ipso eo versetur, i. e. ubi

$$l\,(Al + Fm + En) + m\,(Bm + Dn + Fl) + n\,(Cn + El + Dm) = \Delta$$

Vel:

$$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dmn + 2Enl + 2Flm = \Delta \qquad 3.$$

conditio, cui constantes plani (E) satisfaciant oportet, ut (E) superficiem (1) tangat: — Porro est polus plani (E) respectu sphaerae directricis

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 : \qquad S.$$

$$x = lr^2,\ y = mr^2,\ z = nr^2,$$

unde:

$$l = \frac{x}{r^2},\ m = \frac{y}{r^2},\ n = \frac{z}{r^2},$$

quibus valoribus in aequatione (3) substitutis, obtinetur:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = \Delta .\, r^4$$

vel dividendo per Δ et significando coefficientes novos lineolis supra positis:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2D'yz + 2E'zx + 2F'xy = r^4 \qquad 4.$$

aequatio exhibens reciprocam superficiei propositae (1) polarem respectu sphaerae directricis (S): — eodem modo eruitur aequatio reciprocae polaris pertinentis ad superficiem (2):

$$A'_,x^2 + B'_,y^2 + C'_,z^2 + 2D'_,yz + 2E'_,zx + 2F'_,xy = r^4 \qquad 5.$$

unde fluunt (§ 37) hae quinque conditiones:

$$\left.\begin{array}{l} A' - A'_, = B' - B'_, = C' - C'_, \\ D' = D'_, ,\quad E' = E'_, ,\quad F' = F'_, \end{array}\right\} \qquad X.$$

quibus coefficientes aequationum (1) et (2), quae superficies confocales exhibeant, satisfaciant oportet.*)

*) Joachimsthal in diar. Crell. t. XXVI, 160. 161.

§ 32.

Simili modo solvitur problema generalius:

„*Conditiones invenire, ut superficies:*

$$ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy+2gx+2hy+2iz=1$$

et

$$a_,x^2+b_,y^2+c_,z^2+2d_,yz+2e_,zx+2f_,xy+2g_,x+2h_,y+2i_,z=1$$

confocales sint:"

Primum ut supra polum plani E respectu directricis superficiei (1) quaerimus:

Aequatio plani polaris ad punctum ξ, η, ζ pertinentis respectu directricis (1):

$$\left.\begin{aligned}\xi\,(ax+fy+ez+g)\\ +\eta\,(by+dz+fx+h)\\ +\zeta\,(cz+ex+dy+i)\\ +gx+hy+iz\end{aligned}\right\}=1$$

simul habebit locum cum aequatione

$$l\xi+m\eta+n\zeta=1$$

pro infinite multis coordinatarum ξ, η, ζ valoribus, ubi hae tres aequationes, quibus ad definiendas poli coordinatas utemur, valent:

$$\begin{aligned}ax+fy+ez+g&=l\,(1-gx-hy-iz)\\ by+dz+fx+h&=m\,(1-gx-hy-iz)\\ cz+ex+dy+i&=n\,(1-gx-hy-iz)\end{aligned}$$

vel

$$\begin{aligned}(a+lg)\,x+(f+lh)\,y+(e+li)\,z&=l-g\\ (f+mg)\,x+(b+mh)\,y+(d+mi)\,z&=m-h\\ (c+ng)\,x+(d+nh)\,y+(c+ni)\,z&=n-i\end{aligned}$$

aequationes hujus formae:

$$\begin{aligned}\alpha x+\alpha_1 y+\alpha_2 z&=l-g\\ \beta x+\beta_1 y+\beta_2 z&=m-h\\ \gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2 z&=n-i\end{aligned}$$

ex quibus eruitur:

$$x=\frac{(l-g)(\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2)+(m-h)(\gamma_2\alpha_1-\gamma_1\alpha_2)+(n-i)(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)}{D}$$

$$y = \frac{(l-g)\,(\beta\gamma_2-\beta_2\gamma) + (m-h)\,(\gamma\alpha_2-\gamma_2\alpha) + (n-i)\,(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)}{D}$$

$$z = \frac{(l-g)\,(\beta_1\gamma-\beta\gamma_1) + (m-h)\,(\gamma_1\alpha-\gamma\alpha_1) + (n-i)\,(\alpha_1\beta-\alpha\beta_1)}{D}$$

ubi D est determinans systematis linearis

$$\begin{matrix} \alpha, & \alpha_1, & \alpha_2, \\ \beta, & \beta_1, & \beta_2, \\ \gamma, & \gamma_1, & \gamma_2: \end{matrix}$$

Evolvendo valores expressionum $\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2, \dots$ et ponendo

$$\begin{aligned} eh-fi &= \mathfrak{A}, & dh-bi &= \mathfrak{A}_1, & di-ch &= \mathfrak{A}_2, \\ fi-dg &= \mathfrak{B}, & ei-cg &= \mathfrak{B}_1, & eg-ai &= \mathfrak{B}_2, \\ dg-eh &= \mathfrak{C}, & fg-ah &= \mathfrak{C}_1, & fh-bg &= \mathfrak{C}_2, \end{aligned}$$

obtinemus:

$$x = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} (l-g)\,A + (m-h)\,F + (n-i)\,E \\ +l\,(h\mathfrak{A}_2+i\mathfrak{A}_1) - m\,(i\mathfrak{A}+g\mathfrak{A}_2) - n\,(g\mathfrak{A}_1-h\mathfrak{A}) \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} (m-h)\,B + (n-i)\,D + (l-g)\,F \\ +m\,(i\mathfrak{B}_2+g\mathfrak{B}_1) - n\,(g\mathfrak{B}+h\mathfrak{B}_2) - l\,(h\mathfrak{B}_1-i\mathfrak{B}) \end{pmatrix}$$

$$z = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} (n-i)\,C + (l-g)\,E + (m-h)\,D \\ +n\,(g\mathfrak{C}_2+h\mathfrak{C}_1) - l\,(h\mathfrak{C}+i\mathfrak{C}_2) - m\,(i\mathfrak{C}_1-g\mathfrak{C}) \end{pmatrix}$$

ubi

$$\begin{aligned} D = aA+fF+eE &+l\,(gA+hF+iE) \\ \| \quad &+m\,(hB+iD+gF) \\ \Delta \quad &+n\,(iC+gE+hD) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g\mathfrak{A}_1-h\mathfrak{A} &= h\mathfrak{C}+i\mathfrak{C}_2 \\ h\mathfrak{B}_1-i\mathfrak{B} &= i\mathfrak{A}+g\mathfrak{A}_2 \\ i\mathfrak{C}_1-g\mathfrak{C} &= g\mathfrak{B}+h\mathfrak{B}_2 \end{aligned}$$

quodsi hic polus in plano E

$$lx + my + nz = 1$$

ipso versatur, hoc planum superficiem (1) tangit, unde fluit:

$$\begin{aligned} &l^2(A+h\mathfrak{A}_2+i\mathfrak{A}_1)+m^2(B+i\mathfrak{B}_2+g\mathfrak{B}_1)+n^2(C+g\mathfrak{C}_2+h\mathfrak{C}_1) \\ &+2mn\,(D-g\mathfrak{B}-h\mathfrak{B}_2)+2nl\,(E-h\,\mathfrak{C}_1-i\,\mathfrak{C}_2)+2lm\,(F-i\mathfrak{A}-g\mathfrak{A}_2) \\ &\quad -2l\,(gA+hF+iE)-2m\,(hB+iD+gF)-2n\,(iC+gE+hD)=\Delta \end{aligned}$$

vel ponendo:

$$\frac{h\mathfrak{A}_2+i\mathfrak{A}_1}{\Delta}=A',\quad \frac{i\mathfrak{B}_2+g\mathfrak{B}_1}{\Delta}=B',\quad \frac{g\mathfrak{C}_2+h\mathfrak{C}_1}{\Delta}=C'$$

$$\frac{g\mathfrak{B}_2+h\mathfrak{B}_2}{\Delta}=D',\quad \frac{h\mathfrak{C}_2+i\,\mathfrak{C}_2}{\Delta}=E',\quad \frac{i\mathfrak{A}+g\mathfrak{A}_2}{\Delta}=F'$$

$$\mathrm{g A'+h F'+i E'}=\mathrm{G'}$$

$$\mathrm{h B'+i D'+g F'}=\mathrm{H'}$$

$$\mathrm{i C'+g E'+h D'}=\mathrm{I'}$$

$$\left.\begin{array}{r}(\mathrm{A'}+A')\,\mathrm{l}^2+(\mathrm{B'}+B')\,\mathrm{m}^2+(\mathrm{C'}+C')\,\mathrm{n}^2\\ +2\,(\mathrm{D'}-D')\,\mathrm{mn}+2\,(\mathrm{E'}-E')\,\mathrm{nl}+2\,(\mathrm{F'}-F')\,\mathrm{lm}\\ -2\mathrm{G'l}-2\mathrm{H'm}-2\mathrm{I'n}\end{array}\right\}=1.$$

conditio, cui constantes plani E, ut superficiem (1) tangat, satisfaciant oportet: Polus plani E per sphaeram directricem

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad \mathrm{S.}$$

est

$$x=lr^2,\ y=mr^2,\ z=nr^2$$

unde

$$l=\frac{x}{r^2},\quad m=\frac{y}{r^2},\quad n=\frac{z}{r^2}$$

quibus valoribus in aequatione (3) substitutis:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A'}+A')x^2+(\mathrm{B'}+B')y^2+(\mathrm{C'}+C')z^2\\ +2\,(\mathrm{D'}-D')yz+2\,(\mathrm{E'}-E')zx+2\,(\mathrm{F'}-F')xy\\ -2\mathrm{G'}r^2x-2\mathrm{H'}r^2y-2\mathrm{I'}r^2z\end{array}\right\}=r^4 \qquad 4.$$

aequatio polaris reciprocae pertinentis ad superficiem (1) respectu sphaerae directricis S: eodem modo est aequatio polaris reciprocae alterius superficiei (2):

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A'_{\prime}}+A'_{\prime})x^2+(\mathrm{B'_{\prime}}+B'_{\prime})y^2+(\mathrm{C'_{\prime}}+C'_{\prime})z^2\\ +2(\mathrm{D'_{\prime}}-D'_{\prime})yz+2\,(\mathrm{E'_{\prime}}-E'_{\prime})zx+2\,(\mathrm{F'_{\prime}}-F'_{\prime})xy\\ -2\mathrm{G'_{\prime}}r^2x-2\mathrm{H'_{\prime}}r^2y-2\mathrm{I'_{\prime}}r^2z\end{array}\right\}=r^4 \qquad 5.$$

hinc sequuntur (§ 27) conditiones, quibus oportet coefficientes aequationum (1) et (2) satisfaciant, quae superficies confocales exhibeant, hae octo:

$$\mathrm{A'}-\mathrm{A'_{\prime}}+A'-A'_{\prime}=\mathrm{B'}-\mathrm{B'_{\prime}}+B'-B'_{\prime}=\mathrm{C'}-\mathrm{C'_{\prime}}+C'-C'_{\prime},$$

$$\mathrm{D'}-\mathrm{D'_{\prime}}\mp D'-D'_{\prime}=\mathrm{E'}-\mathrm{E'_{\prime}}\mp E'-E'_{\prime}=\mathrm{F'}-\mathrm{F'_{\prime}}\mp F'-F'_{\prime},$$

$$\mathrm{G'}=\mathrm{G'_{\prime}},\ \mathrm{H'}=\mathrm{H'_{\prime}},\ \mathrm{I'}=\mathrm{I'_{\prime}}.$$

VITA.

Natus sum Oswaldus Hermes, fidei evangelicae addictus, die XXV. mens. Apr. anni h. s. XXVI in vico, cui nomen est Jenkau, prope urbem Liegnitz sito, parentibus Paulo, nunc dioeceseos Wuestebriesianae Parocho, et Julia e gente Schwartziana. Primis literarum elementis a patre imbutus, anno h. s. XXXVI gymnasium Vratislaviense Elisabetanum, quod t. t. rectore Ill. Reiche, nunc beato, florebat, frequentare coepi. Novem annis post testimonio maturitatis instructus hanc almam literarum Universitatem adii Viadrinam et rectore magnifico Ill. Pohl, quem jam defunctum lugemus, inter cives academicos receptus apud philosophos decano Ill. Schneider nomen dedi. Vratislavia relicta anno h. s. XLVII Berolinum me contuli ibidemque in alma literarum sede Friderica Guilelma, t. t. Ill Müller fasces academicos tenente, studia mea continuavi et ante hos tres menses absolvi.

Per hoc temporis spatium me docuerunt: Mathesin Viri Clarissimi, Illustrissimi, Doctissimi Kummer, C. G. I. Iacobi, Dirichlet, Steiner, Joachimsthal, Eisenstein, Borchardt; physicen Pohl et Dove; chemiam Duflos et Mueller; botanicen Nees ab Esenbeck et Koerber; zoologiam

Gravenhorst; mineralogiam Kenngott; philosophiam Braniss, Nees ab Esenbeck, Werder; historiam Stenzel; historiam literarum Jacobi.

Quibus omnibus viris optime de me meritis pro doctrinis mihi oblatis gratias me agere, quam maximas possim, semperque acturum esse palam profiteor.
